Enseignant : Dr. Sylvain Bréchet
Cours : physique générale I
Date : vendredi 19 décembre 2025
Durée : 210 minutes

1

Examen à blanc - Enoncé

NOM :

PRENOM :

N° SCIPER :

SECTION : **Mathématiques**

SALLE :

L'examen est constitué de 3 problèmes qui totalisent 39 points. Chaque problème comporte un énoncé illustré et détaillé sur la page de gauche et des questions sur la page de droite. Les développements mathématiques et physiques d'un problème doivent être effectués et rédigés proprement sur les pages quadrillées à la fin du problème.

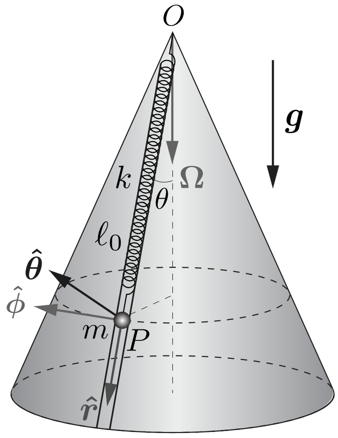
Consignes

- Préparer votre **carte Camipro**, la poser visiblement sur la table et vérifier votre **N° Sciper**.
- **Attendre** le début de l'épreuve **avant d'ouvrir** le cahier d'examen.
- Le **formulaire** de l'examen (1 page A4 recto-verso) est autorisé.
- L'utilisation de tout **appareil électronique** est interdite.
- Un **dictionnaire bilingue** non annoté est autorisé pour les étudiant.e.s **non francophones**.
- Effectuer les **développements mathématiques et physiques** d'un problème sur les **pages quadrillées** à la fin du problème.
- Retranscrire les **réponses** sur les pointillés sous chaque question dans les espaces réservés à cet effet.
- Utiliser un **stylo** à encre **noir ou bleu foncé** (éviter d'utiliser un crayon) et effacer proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Ne **pas dégrafer** le cahier d'examen et laisser le **tableau** et les **cases blanches vides**.
- Les feuilles de papier **brouillon** ne seront **pas ramassées** et **pas corrigées**.
- Il est recommandé de résoudre les questions **bonus** à la fin de l'examen si le temps le permet.

Problème 1 : Bille oscillant sur un cône en rotation (21 points)

☐ 0	☐ 1	☐ 2	☐ 3	☐ 4	☐ 5	☐ 6	☐ 7	☐ 8	☐ 9	☐ 10	☐ 11	☐ 12	☐ 13	☐ 14	☐ 15
	☐ 16	☐ 17	☐ 18	☐ 19	☐ 20	☐ 21									

Laisser les cases blanches vides



Une bille considérée comme un point matériel P de masse m est suspendu à un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0. La partie supérieure du ressort est fixée à l'origine O au sommet d'un cône vertical de demi angle d'ouverture θ constant par rapport à son axe de symétrie vertical. Un moteur fait tourner le cône autour de son axe de symétrie à vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ constante dans le sens horaire en vue d'avion. Une rainure le long du cône empêche la bille d'avoir un mouvement relatif horizontal par rapport au cône. Ainsi, lorsqu'elle est en contact avec le cône son mouvement est purement radial par rapport au référentiel relatif du cône. On suppose que la bille coulisse sans frottement à l'intérieur de la rainure et que les valeurs des grandeurs physiques sont telles que la bille reste en permanence en contact avec le cône.

Pour décrire la dynamique de la bille sur le cône en rotation, on considère deux référentiels : le référentiel d'inertie absolu $\mathcal{R}$ du sol et le référentiel accéléré relatif $\mathcal{R}'$ du cône en rotation. On choisit un repère sphérique relatif $(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ où le vecteur unitaire radial $\hat{\boldsymbol{r}}$ est orienté radialement vers la base du cône, le vecteur unitaire nodal $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est orthogonal au plan tangent au cône et orienté vers l'extérieur, et le vecteur unitaire azimutal $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ est orienté horizontalement dans le sens horaire. On choisit le sommet du cône O comme origine du repère relatif sphérique.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse m de la bille, de la constante élastique k du ressort, de sa longueur à vide ℓ_0, de la vitesse angulaire scalaire Ω de rotation du cône, de la norme du champ gravitationnel g, des coordonnées sphériques relatives r, θ et ϕ, de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ et $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ du repère sphérique et des grandeurs spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. (**3 points**) Déterminer la force centrifuge $\boldsymbol{F}_c$ et la force de Coriolis $\boldsymbol{F}_C$ exercées sur la bille dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ du cône.

   $\boldsymbol{F}_c =$ ....

   $\boldsymbol{F}_C =$ ....

2. (**5 points**) Déterminer le vecteur force de réaction normale $\boldsymbol{N}$ exercé par le cône sur la bille.

   $\boldsymbol{N} =$ ....

3. (**1 point**) Montrer que l'équation du mouvement relatif de la bille sur le cône s'écrit,

   $$\ddot{r} - r\,\Omega^2 \sin^2\theta + \frac{k}{m}\,(r - \ell_0) - g\cos\theta = 0\,.$$

4. (**2 points**) Déterminer l'inéquation qui doit être satisfaite par la vitesse angulaire scalaire Ω pour que la bille ne décolle pas.

   ....

5. (**3 points**) Déterminer la coordonnée radiale d'équilibre r_0 et la condition à satisfaire pour qu'elle soit stable.

   $r_0 =$ ....

   ....

6. (**1 point**) Déterminer la période des oscillations autour de la position d'équilibre stable r_0.

   $T =$ ....

7. (**2 points**) Montrer que la grandeur scalaire H donnée ci-dessous est constante,

   $$H = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\,m\,r^2\Omega^2\sin^2\theta + \frac{1}{2}\,k\,(r - \ell_0)^2 - mgr\cos\theta\,.$$

8. (**4 points**) Déterminer l'énergie mécanique E de la bille par rapport au référentiel d'inertie absolu $\mathcal{R}$ du sol en prenant comme référence d'énergie potentielle de pesanteur le plan horizontal contenant l'origine O et comme référence d'énergie potentielle élastique l'extrémité du ressort à vide.

   $E =$ ....

   Montrer que la dérivée temporelle de l'énergie mécanique s'écrit,

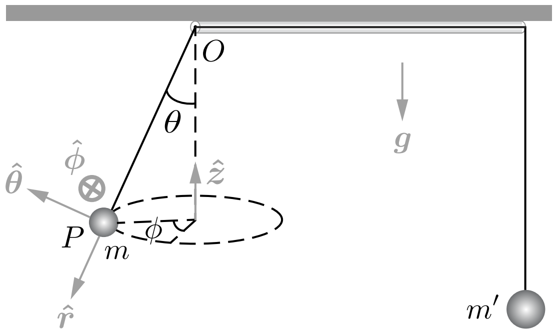
   $$\dot{E} = -\,\boldsymbol{F}_C \cdot \boldsymbol{v}_a\,(P)\;,$$

   où $\boldsymbol{v}_a\,(P)$ est la vitesse absolue de la bille.

Problème 2 : Pendule conique de longueur variable (20 points)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ☐11 ☐12 ☐13 ☐14 ☐15 ☐16 ☐17 ☐18 ☐19 ☐20

Laisser les cases blanches vides



Une bille considérée comme un point matériel P de masse m est attachée à l'extrémité gauche d'un fil inextensible de masse négligeable. Ce fil coulisse sans frottement sec à travers une gaine horizontale attachée au plafond. L'extrémité droite du fil est attachée à un contrepoids considéré comme un point matériel de masse m'. On place l'origine O à l'extrémité gauche de la gaine. La bille a un mouvement de rotation autour de l'axe vertical qui passe par l'origine O alors que le contrepoids a uniquement un mouvement vertical de vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{z}}$ orienté vers le haut. Le système constitué de la bille et du contrepoids est soumis au frottement visqueux de l'air caractérisé par le coefficient de frottement b.

Afin d'étudier la dynamique de la bille, on choisit un repère sphérique $(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$ d'origine O où le vecteur unitaire radial $\hat{\boldsymbol{r}}$ est orienté le long du fil vers le bas, le vecteur unitaire nodal $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est orthogonal au fil orienté vers le haut et le vecteur unitaire $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ est orienté horizontalement dans le sens horaire.

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse m de la bille, de la masse m' du contrepoids, du coefficient de frottement visqueux b, de la norme du champ gravitationnel g, des coordonnées sphériques r, θ et ϕ, de leurs dérivées temporelles, des vecteurs de base $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\hat{\boldsymbol{\phi}}$, et des grandeurs scalaires spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. (**3 points**) Déterminer la puissance P dissipée par le frottement de l'air dans le système.

   $P =$ ....

2. (**3 points**) Déterminer le vecteur tension $\boldsymbol{T}$ exercée par le fil sur la bille lorsque le système constitué de la bille et du contrepoids n'est pas à l'équilibre en considérant la dynamique du contrepoids.

   $\boldsymbol{T} =$ ....

3. (**3 points**) Montrer que les équations du mouvement radial et nodal de la bille s'écrivent,

$$(m+m')\,\ddot{r} + 2\,b\,\dot{r} - m\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\sin^2\theta\right) r + (m' - m\cos\theta)\,g = 0\,,$$
$$m\,r\,\ddot{\theta} + (b\,r + 2\,m\,\dot{r})\,\dot{\theta} + m\left(g - r\,\dot{\phi}^2\cos\theta\right)\sin\theta = 0\,.$$

4. (**1 point**) Déterminer le vecteur moment cinétique $\boldsymbol{L}_O$ de la bille évalué par rapport à l'origine O.

   $\boldsymbol{L}_O =$ ....

5. (**3 points**) Lorsque le fil attaché à la bille est vertical, c'est-à-dire $\theta = 0$ et $\dot{\phi} = 0$, dans le cas où $m > m'$, déterminer la vitesse limite de chute v_∞ de la bille de masse m et l'évolution temporelle de sa vitesse radiale $\dot{r}\,(t)$ en termes du temps d'amortissement,

$$\tau = \frac{m+m'}{2\,b}\,,$$

   compte tenu de la condition initiale $\dot{r}\,(0) = 0$.

   $v_\infty =$ ....

   $\dot{r}\,(t) =$ ....

6. (**2 points**) Pour cette question et la suivante, on néglige le frottement de l'air, c'est-à-dire $b \to 0$. Montrer alors que la composante verticale du moment cinétique $L_z \equiv \boldsymbol{L}_O \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = m\,r^2\,\dot{\phi}\,\sin^2\theta$ évalué à l'origine O est constante.

7. (**5 points**) Lorsque le contrepoids est immobile, déterminer l'angle d'inclinaison constant θ_0 du fil de la bille et la norme de l'accélération centripète a_c de la bille uniquement en termes des masses m et m' et du champ gravitationnel g. Déterminer la condition qui doit être satisfaite pour que le contrepoids puisse être immobile.

   $\theta_0 =$ ....

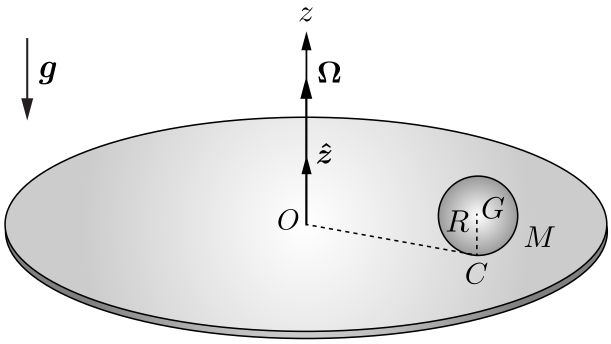
   $a_c =$ ....

   ....

Problème 3 : Sphère roulant sans glisser sur un disque tourant (17 points)

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9 ☐10 ☐11 ☐12 ☐13 ☐14 ☐15 ☐16 ☐17

Laisser les cases blanches vides



Une sphère de masse M, de rayon R et de moment d'inertie I_G, par rapport à un axe passant par son centre de masse G, roule sans glisser sur un disque. Le moment d'inertie de la sphère s'écrit,

$$I_G = \lambda\, M R^2 \qquad \text{où} \qquad \frac{2}{5} \leqslant \lambda \leqslant \frac{2}{3}\,.$$

Le disque est en rotation à vitesse angulaire constante,

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\,\hat{\boldsymbol{z}} = \mathbf{cste}\,,$$

autour de son axe de symétrie dans le sens trigonométrique en vue d'avion par rapport au référentiel d'inertie du sol. Le vecteur vitesse angulaire de rotation propre de la sphère $\boldsymbol{\omega}$ a une orientation quelconque. L'origine O est située à l'intersection entre l'axe de symétrie et le disque. On note C le point de contact entre la sphère et le disque. Le vecteur position du centre de masse de la sphère $\boldsymbol{R}_G$ est lié au vecteur position du point de contact $\boldsymbol{R}_C$ par la relation,

$$\boldsymbol{R}_G = \boldsymbol{R}_C + R\,\hat{\boldsymbol{z}}\,.$$

Le frottement statique dans le plan du disque permet le roulement sans glissement de la sphère sur le disque, mais il n'y a pas de frottement cinétique sec ou visqueux à prendre en considération.

Ce problème est à résoudre vectoriellement en utilisant l'identité suivante pour trois vecteurs d'orientation quelconque $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\boldsymbol{c}$,

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\;\boldsymbol{b} - \;(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\;\boldsymbol{c}\,.$$

Les réponses doivent être exprimées en termes de la masse M, du rayon R, des vecteurs vitesses angulaires $\boldsymbol{\Omega}$ et $\boldsymbol{\omega}$, de la vitesse angulaire scalaire Ω, du coefficient λ, du vecteur position $\boldsymbol{R}_G$, du vecteur vitesse $\boldsymbol{V}_G$ et du vecteur accélération $\boldsymbol{A}_G$ du centre de masse G de la sphère, du vecteur unitaire vertical $\hat{\boldsymbol{z}}$ et des grandeurs scalaires et vectorielles spécifiées dans l'énoncé de chaque question.

Questions et réponses ci-contre, calculs sur les pages quadrillées suivantes

1. (**2 points**) A l'aide de la condition vectorielle de roulement sans glissement de la sphère sur le disque, montrer que la vitesse du centre de masse de la sphère s'écrit,

$$\boldsymbol{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}_G + R\,\boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{z}}\,.$$

2. (**4 points**) A l'aide du théorème du moment cinétique évalué au centre de masse G et du théorème du centre de masse, montrer que l'accélération angulaire de rotation propre de la sphère s'écrit,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\,\frac{1}{\lambda\,R}\,\hat{\boldsymbol{z}} \times \boldsymbol{A}_G \qquad \text{en déduire que} \qquad \boldsymbol{\omega}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} = \text{cste}\,.$$

3. (**2 points**) Montrer que le mouvement du centre de masse est décrit par l'équation vectorielle suivante,

$$\boldsymbol{A}_G = \boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{V}_G\,.$$

Déterminer le vecteur vitesse angulaire de rotation $\boldsymbol{\Omega}'$ du centre de masse G de la sphère,

$\boldsymbol{\Omega}' =$ ....

4. (**3 points**) Montrer que le centre de masse G de la sphère a un mouvement circulaire de vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\Omega}'$ autour du point fixe A décrit par l'équation,

$$\boldsymbol{V}_G = \boldsymbol{\Omega}' \times (\boldsymbol{R}_G - \boldsymbol{R}_A) \qquad \text{en déduire que} \qquad \boldsymbol{A}_G = -\,\Omega'^2\,(\boldsymbol{R}_G - \boldsymbol{R}_A)\,.$$

Déterminer le vecteur position $\boldsymbol{R}_A$ du centre A de la trajectoire circulaire,

$\boldsymbol{R}_A =$ ....

à l'aide des conditions initiales sur la position $\boldsymbol{R}_{G,0}$ et la vitesse $\boldsymbol{V}_{G,0}$ du centre de masse G compte tenu de l'identité vectorielle,

$$\boldsymbol{V}_{G,0} = -\,\frac{1}{\Omega'^2}\,\boldsymbol{\Omega}' \times \left(\boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{V}_{G,0}\right)\,.$$

5. (**1 point**) Pour une sphère homogène pleine de coefficient $\lambda = 2/5$, déterminer le rapport de la période de rotation T' du centre de masse G de la sphère autour du point A et de la période de rotation T du disque.

$\dfrac{T'}{T} =$ ....

6. (**1 point**) Déterminer le vecteur force de frottement statique $\boldsymbol{F}_s$ exercé par le disque sur la sphère en termes des vecteur positions $\boldsymbol{R}_G$ et $\boldsymbol{R}_A$ et du vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}'$.

$\boldsymbol{F}_s =$ ....

7. (**2 points**) Montrer que le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}$ de rotation propre de la sphère s'écrit,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \frac{\Omega'}{\lambda\,R}\,(\boldsymbol{R}_G - \boldsymbol{R}_{G,0})\,,$$

où $\boldsymbol{\omega}_0$ est la vitesse angulaire de rotation propre initiale.

8. (**2 points**) Montrer que la composante verticale du vecteur moment cinétique de la sphère,

$$\boldsymbol{L}_A = M\,(\boldsymbol{R}_G - \boldsymbol{R}_A) \times \boldsymbol{V}_G + I_G\,\boldsymbol{\omega}\,,$$

évaluée au centre A de la trajectoire circulaire est constante.